Abstract

We provide a definition of weighted function of bounded variation when the weight function ω belongs to a certain subclass of Muckenhoupt's A_1 weight class. We obtain Poincaré and isoperimetric inequalities in this space and as an application we prove existence of minimal surfaces.

Riassunto

Si definisce lo spazio delle funzioni a variazione limitata con peso, quando la funzione peso ω che si considera appartiene ad una sottoclasse della classe dei pesi A_1 di Muckenhoupt. Si ottengono disuguaglianze di Poincaré ed isoperimetriche in questo spazio, e in particolare l'esistenza di superfici minime.

1 Introduzione

Studiando problemi di calcolo delle variazioni con i cosiddetti metodi diretti, le principali difficoltà ad un uso generalizzato di tali metodi provengono essenzialmente dalla necessità di una scelta di opportuni spazi funzionali in cui ambientare i problemi di minimo. È in quest'ottica che sono stati introdotti gli spazi di Sobolev, visti come l'ambito ottimale in cui studiare il funzionale dell'energia di Dirichlet e successivamente gli spazi BV, legati allo studio di problemi di minimo per funzionali tipo area $\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\,dx$.

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$. L' insieme $BV(\Omega)$ delle funzioni BV (si vedano ad esempio [EG], [G]) è lo spazio di Banach delle funzioni $u \in L^1(\Omega)$ tali che

$$\operatorname{var} u(\Omega) := \sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\,dx : |\varphi| \leq 1,\ \varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\} < \infty, \tag{1.1}$$

dove con $\mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ si indica lo spazio delle funzioni Lipschitz continue a supporto compatto; $BV(\Omega)$ è dotato della norma $\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \operatorname{var} u(\Omega)$.

Sia $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\omega > 0$ una funzione peso che appartiene alla classe A_1 dei pesi di Muckenhoupt ([Mu], [GCRF]), cioè che soddisfa la condizione

$$\omega(x) \geq c\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \omega(y)\,dy \tag{1.2}$$

q.o. in ogni $B(x,r) \subset \Omega$.

In questa nota generalizziamo la nozione di funzione a variazione limitata nel contesto degli spazi BV associati a un peso di Muckenhoupt ω nella prospettiva di estendere i risultati noti per il funzionale classico dell'area a funzionali dell'area $\int \omega\sqrt{1+|Du|^2}\,dx$, provando infatti come applicazione un risultato di esistenza per superfici di area minima rispetto a questa densità.

Il primo passo in questa direzione è dare una corretta definizione (operativa) di spazio BV associato alla nuova misura $\omega(x)\,dx$, con $\omega \in A_1$.

Un approccio naturale, potrebbe essere quello di definire lo spazio BV peasto come l'insieme delle funzioni u integrabili rispetto alla misura $\omega(x)\,dx$, cioè $u \in$

$L^1(\Omega;\omega)$, per le quali è finita la quantità

$$\sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx : |\varphi| \le \omega \text{ per ogni } x\in\Omega,\ \varphi\in \operatorname{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\}. \tag{1.3}$$

L'ipotesi che il peso stia in A_1 viene naturale in quanto essa è la classe naturale per avere disuguaglianze di Sobolev-Poincaré pesate in $W^{1,1}$. Più in generale, le classi di pesi A_p sono classi di pesi appropriate quando si lavora con spazi di sobolev pesati. Negli spazi $W^{p,s}$ pesati però è sufficiente avere funzioni peso definite solo quasi ovunque, in quanto le funzioni appartenenti a tali spazi hanno derivate che, come misure, sono assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue. Invece negli spazi BV, in cui le derivate si possono concentrare su insiemi di misura (di Lebesgue) nulla, occorre maggior cautela nello scegliere la classe di pesi con cui lavorare. Infatti lo spazio BV assocaito alla misura $\omega(x)\,dx$ dipenderà dal rappresentante che si sceglie per ω fra tutte le funzioni della classe A_1, ovvero ω dovrà essere definito puntualmente. Come prima cosa, osserveremo che qualsiasi sia la nostra funzione peso ω, esisterà una funzione inferioremente semicontinua (isc) ω^* che definisce, via la (1.3), la stessa misura variazione e che coincide con ω se ω stessa è isc. Poiché le funzioni isc godono inoltre di diverse buone propietà, viene naturale assumere che ω sia isc. Una scelta naturale che può essere fatta, sarà quella di considerare come peso definito puntualmente la funzione massimale di Hardy-Littlewood $M\omega$ di un peso in $\omega \in A_1$; infatti $M\omega$ soddisfa la condizione A_1, (1.2), in tutti i punti ed è anche una funzione inferiormente semicontinua. Inoltre, rispetto alla misura di Lebesgue, $\omega \approx M\omega$ se $\omega \in A_1$. Per di più si ha $BV(\Omega;\omega) \subseteq BV(\Omega)$.

Il risultato centrale, contenuto in questa nota, è un risultato di caratterizzazione per funzioni in $BV(\Omega;\omega)$ in termini di sommabilità di ω rispetto alla misura variazione non pesata associata alla stessa funzione (Teorema 4.1).

Questo Teorema gioca un ruolo centrale in questo lavoro. Infatti, mediante questo risultato otterremo una disuguaglianza di Sobolev-Poincaré per funzioni BV con peso (Teorema 4.3) e quindi la locale immersione compatta dello spazio BV pesato nello spazio pesato L^1 (Teorema 5.1) da cui seguirà l'esistenza di superfici minime (Teorema 5.2).

Mentre stavamo lavorando su questo soggetto, siamo venuti a conoscenza di certi risultati connessi che si trovano in [BBF] e [BBMP]. Nell'Osservazione 5.3 commenteremo l'approccio di [BBF].

2 Preliminari

Lo spazio $BV(\Omega)$ si può caratterizzare come lo spazio delle funzioni $u \in L^1(\Omega)$ tali che Du è una misura di Radon. Questo è quello che più in dettaglio il seguente Teorema afferma (si veda [EG], § 5.1, Teorema 1).

Teorema 2.1. *Se $u \in BV(\Omega)$, allora esiste una misura di Radon ν su Ω e una funzione ν-misurabile $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che:*

- $|\sigma(x)| = 1$, *ν-q.o. in Ω;*
- $\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_\Omega < \varphi, \sigma > d\nu(x)$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Il nostro intento è di estendere la nozione di spazio BV quando si lavora con la misura ωdx invece che con la misura di Lebesgue dx.

Osservazione 2.2. *Se denotiamo con $M\omega$ la funzione massimale di Hardy-Littlewood di ω, cioè se*

$$(M\omega)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \omega(x-y)dy,$$

la condizione (1.2) equivale al seguente:

$$M\omega(x) \leq A\omega(x) \text{ q.o. in } \Omega, \tag{2.4}$$

nel senso che (1.2) implica (2.4) con $A \leq 1/c$, e viceversa (2.4) implica (1.2) con $1/c \leq 2^n A$.

Se $\omega \in A_1$ è mostrato in maniera semplice in [S] e [GCRF] che la misura $\omega(x)dx$ è doubling; da questo in particolare segue che se due palle di raggi confrontabili si intersecano, allora le loro misure sono confrontabili.

Osservazione 2.3. *Ricordando la Definizione di peso A_1, se Ω è un assegnato aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, a meno di una costante moltiplicativa, possiamo supporre che $\omega \geq 1$ q.o. in Ω.*

piuttosto naturale il richiedere l'inferiore semicontinuità del peso in quanto, a partire da un qualsiasi peso A_1, lo spazio $BV(\Omega;\omega)$ e equivalentemente definito da un peso inferiormente semicontinuo, che ha però diverse utili ulteriori proprietà. Per esempio, è possibile approssimare ogni funzione inferiormente semicontinua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ con un'opportuna successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di funzioni lipschitziane a supporto compatto. Tale successione viene chiamata *l'inviluppo di Pash Hausdorff di* f (cfr. [R], Esempio 9.11).

Teorema 2.4 (L'inviluppo di Pash Hausdorff di f). *Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ sia propria (cioè $f(x) < +\infty$ per almeno un $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) > -\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$) e che sia inferiormente semicontinua. Per ogni $k \in \mathbb{R}_+$ resta definita la funzione*

$$f_k(x) := \inf_{w \in \mathbb{R}^n} \{f(w) + k|w - x|\}\,. \tag{2.5}$$

A meno che $f_k = -\infty$, f_k è lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ con costante di Lipschitz k, ed è la più grande fra tutte le funzioni lipschitziane maggiorate da f. (Quando $f_k = -\infty$, non esiste alcuna funzione maggiorata da f che sia lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ di costante k).
Inoltre, purché esista un $\bar{k} \in \mathbb{R}_+$ con $f_{\bar{k}} \neq -\infty$, si ha, per $k \nearrow \infty$, che $f_k(x) \nearrow f(x)$ per ogni x.

Osservazione 2.5. *Siano f e $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ come nel precedente Teorema e definite in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$; consideriamo la successione a valori reali*

$$g_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq 1/k \\ kt - 1 & \text{se} \quad 1/k < t < 2/k \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 2/k; \end{cases}$$

è immediato verificare che $f_k(x)g_k(d(x, \partial\Omega)) \nearrow f(x)$ e che appartiene a $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$. D'ora in avanti, quando diremo che una successione $\{f_k\}$ è l'inviluppo di Pash-Hausdorff di una funzione f che soddisfa le ipotesi del Teorema 2.4, sottintenderemo anche che essa è una successione in $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$.

La nostra notazione è standard. Per ogni insieme Lebessgue-misurabile E, indichiamo con $\omega(E) := \int_\Omega \chi_E(x)\,\omega(x)dx$ la sua misra e, se B denota una palla in Ω, u_B è la media della funzione u in B, cioè $u_B = \fint_B u(u)\,dy = \frac{1}{|B|}\int_B u(u)\,dy$.

3 La classe delle funzioni BV pesate

Sia Ω un sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia ω un peso nella classe A_1. Per voler imitare la definizione classica di spazio BV potremmo pensare di definire lo spazio $BV(\Omega;\omega)$ come l'insieme delle funzioni $u \in L^1(\Omega;\omega)$, per le quali

$$\sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\,dx : \; |\varphi| \leq \omega \text{ per ogni } x \in \Omega,\; \varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\} < \infty,$$

dotato della norma $\|u\|_{BV(\Omega;\omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega;\omega)} + \mathrm{var}_\omega\, u(\Omega)$. Come abbiamo già anticipato sopra, la questione è delicata. La "definizione-tentaivo" precedente sembra

ancora troppo imprecisa e ci sono molti aspetti che dobbiamo puntualizzare ed analizzare.

Quando si lavora con gli spazi di Sobolev pesati $W^{p,s}$, le funzioni peso sono definite quasi ovunque in quanto le funzioni in tali spazi di Sobolev hanno le derivate che - come misure - sono assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue. La situazione è completamente diversa quando si ha a che fare con gli spazi BV, nei quali le derivate possono essere concentrate su insiemi di misura nulla (si pensi, ad esempio, alla funzione caratteristica di un aperto limitato regolare). Questo comporta il fatto che lo spazio $BV(\Omega;\omega)$ dipende dal rappresentante che scegliamo per ω, che quindi deve essere definito puntualmente.

Una naturale assunzione su ω è il richiedere che esso appartenga alla classe A_1 di Muckenhoupt, poiché questa è la classe naturale per avere le disuguaglianze di Sobolev-Poincaré in $W^{1,1}$ pesato. In effetti ci servirà una stima puntuale della forma

$$\omega(x) \geq c \fint_B \omega(y)\, dy,$$

per tutte le palle $B = B(x,r)$.

Osserviamo poi che è possibile sostituire un peso $\omega \in A_1$ con un peso inferiormente semicontinuo senza modificare la definizione di spazio $BV(\Omega;\omega)$. *Sia* $\omega \in A_1$.

1) Se denotiamo con

$$\omega^* := \sup_{\substack{\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n);\\ |\varphi| \leq \omega;}} |\varphi|,$$

allora $BV(\Omega;\omega) = BV(\Omega;\omega^*)$.

2) Consideriamo il rilassato di ω, *cioè* $\omega^{**} := \sup\{g : \Omega \to \mathbb{R}_+;\ g\ lsc,\ g \leq \omega\}$, *allora* $\omega^{**} = \omega^*$ *in* Ω.

3) $\omega^{**} \in A_1$.

Dimostrazione. 1) Per definizione, è vero che $\omega^* \leq \omega$. Perciò $BV(\Omega;\omega) \subseteq BV(\Omega;\omega^*)$. Se per assurdo supponiamo che esista una funzione $u \in BV(\Omega;\omega^*)$ ma $u \notin BV(\Omega;\omega)$, allora è possibile trovare una successione $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ con la proprietà che

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\, \varphi_n \, dx \longrightarrow \infty,\ |\varphi_n| \leq \omega. \tag{3.6}$$

Per sua definizione $|\varphi_n| \leq \omega^*$, e quindi $\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi_n\, dx \leq \sup_{|\varphi|\leq\omega^*} \int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi\, dx < \infty$ dato che $u \in BV(\Omega;\omega^*)$. Il che contraddice la (3.6).

E' immediato verificare che le due norme $\|\ \|_{BV(\Omega;\omega)}$ e $\|\ \|_{BV(\Omega;\omega^*)}$ coincidono.

2) Si verifica che ω^* è una funzione inferiormente semicontinua, dunque $\omega^* \leq \omega^{**}$. Supponiamo per assurdo che $\omega^* \neq \omega^{**}$; esisterà un punto $\overline{x} \in \Omega$ tale che

$$\omega^*(\overline{x}) < \omega^{**}(\overline{x}). \tag{3.7}$$

Costruiamo, come nel Teorema 2.4, la successione $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ inviluppo di ω^{**}, allora $\omega_n(\overline{x}) \longrightarrow \omega^{**}(\overline{x})$. Si osservi che

$$\omega_n(\overline{x}) \leq \omega^*(\overline{x}) \tag{3.8}$$

per ogni n, poiché $\omega_n \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$, per l'Osservazione 2.5, e $\omega_n \leq \omega^{**} \leq \omega$ per ogni n. Quindi, per la (3.7) se $n \to \infty$ in (3.8), abbiamo che $\omega^{**}(\overline{x}) \leq \omega^*(\overline{x}) < \omega^{**}(\overline{x})$, che è assurdo.

3) Per concludere, mostriamo che $\omega^{**} \in A_1$. La funzione massimale $M\omega^{**}$ è inferiormente semicontinua e $M\omega^{**} \leq M\omega \leq A\omega$, perciò per la definizione ω^{**}, $\frac{1}{A}M\omega^{**} \leq \omega^{**}$ in Ω.

□

Allora una scelta opportuna è di sceglire ω inferiormente semicontinua (per esempio questo implica il Teorema di approssimazione 2.4). La funzione

$$\tilde{\omega}(x) = M\omega(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} \omega(y)\, dy \tag{3.9}$$

è equivalente ad ω nel senso che

$$0 < \inf \mathrm{ess} \frac{\tilde{\omega}}{\omega} < \sup \mathrm{ess} \frac{\tilde{\omega}}{\omega} < \infty$$

e soddisfa entrambe le nostre richieste perché è inferiormente semicontinua, in quanto estremo superiore di una famiglia di funzioni continue, e soddisfa puntualmente la condizione A_1 poiché

$$\fint_{B(x,r)} \tilde{\omega}(y)\, dy \leq \frac{1}{c} \fint_{B(x,r)} \omega(y)\, dy \leq \frac{1}{c} M\omega(x) = \frac{1}{c}\tilde{\omega}(x).$$

Dunque, partendo da un qualsiasi peso ω in A_1, si può definire in maniera canonica un nuovo peso $\tilde{\omega}$ in A_1 che è inferiormente semicontinuo e soddisfa la (3.9).

Siamo adesso in grado di stabilire con precisione quale deve essere la classe di funzioni peso da utilizzare in questo contesto, e di conseguenza possiamo dare la definizione corretta di spazio BV pesato.

Definizione 3.1. *La classe $\omega \in A_1^*$ è la classe dei pesi $\omega \in A_1$, ω isc e che verificano la condizione A_1 in ogni punto.*

Per l'osservazione precedente tale classe è non vuota.

Definizione 3.2. *Sia $\omega \in A_1^*$. Denotiamo con $BV(\Omega;\omega)$ l'insieme delle funzioni $u \in L^1(\Omega;\omega)$ tali che*

$$\sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx : |\varphi| \leq \omega \text{ ovunque, } \varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\} < \infty \tag{3.10}$$

e indichiamo con $\mathrm{var}_\omega u(\Omega)$ la quantità (3.10).

La misura variazione $\mathrm{var}_\omega u(\Omega)$ è una misura di Radon (la prova di questo fatto è solo una piccola variante del caso non pesato, cfr. [EG], §1.8). In particolare abbiamo la seguente proprietà di semicontinuità.

Teorema 3.3 (Teorema di Semicontinuità). *Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega;\omega)$, tale che $u_k \overset{L^1(\Omega;\omega)}{\longrightarrow} u$ se $k \to \infty$. Allora*

$$\mathrm{var}_\omega u(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathrm{var}_\omega u_k(\Omega)$$

Dimostrazione. La mappa $u \longrightarrow \mathrm{var}_\omega u(\Omega)$ è il sup di una famiglia di funzionali $L^1(\Omega;\omega)$-contini. □

Osservazione 3.4. *Sia $\omega \in A_1^*$. Se $u \in BV(\Omega;\omega)$, allora $u \in BV(\Omega)$.*

Ricordiamo che lo spazio di Sobolev $(1,1)$-pesato è l'insieme $W^{1,1}(\Omega;\omega) := \{u \in L^1(\Omega;\omega) : Du \in L^1(\Omega;\omega)\}$ dotato della norma $\|u\|_{W^{1,1}(\Omega;\omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega;\omega)} + \|Du\|_{L^1(\Omega;\omega)}$. Se $\omega \in A_1^*$ e $u \in W^{1,1}(\Omega;\omega)$ le due norme $BV(\Omega;\omega)$ e $W^{1,1}(\Omega;\omega)$ sono equiavlenti, poiché $\mathrm{var}_\omega u(\Omega) = \int_\Omega |Du|\,\omega(x)\,dx$, e $u \in BV(\Omega;\omega)$.

Un primo traguardo è ottenere un risultato analogo al Teorema 2.1, ossia provare che esiste una equivalenza tra la formulazione tecnica (3.10) usata per definire $BV(\Omega;\omega)$ e la definizione di suddetto spazio come la collezione delle funzioni f il cui gradiente distribuzionale Df è una misura di Radon in $\mathbb{R}^n$ come spiegato dal seguente teorema:

Teorema 3.5. *Sia $\omega \in A_1^*$ e sia $f \in BV(\Omega;\omega)$. Allora esistono una misura di Radon μ su Ω e una funzione μ-misurabile $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che*

(i) $|\sigma(x)| = 1$ *μ-q.o. in Ω;*

(ii) $\displaystyle\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_\Omega <\varphi,\sigma> \frac{1}{\omega(x)}d\mu(x)$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

La prova di questo Teorema richiede qualche impegno. Procederemo adesso con un po' di lavoro preliminare.

3.1 Approssimazione con funzioni C^∞. Caso $\omega \in \mathrm{Lip}(\Omega)$

Nel caso particolare di $\omega \in \mathrm{Lip}(\Omega)$, ogni $u \in BV(\Omega;\omega)$ può essere approssimata in modo opportuno con una successione di funzioni C^∞.

Teorema 3.6. (Teorema di densità). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $\omega \in Lip(\Omega)$, $\omega \in A_1$ sia una funzione peso. Sia $u \in BV(\Omega;\omega)$; allora esiste una successione $\{u_k\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega;\omega)$ tale che*

(i)

$$\|u_k - u\|_{L^1(\Omega;\omega)} \longrightarrow 0 \quad se\ k \to +\infty,$$

(ii)

$$\mathrm{var}_\omega\, u_k \longrightarrow \mathrm{var}_\omega\, u \quad se\ k \to +\infty.$$

Dimostrazione. Si veda Teorema 3.7 in [B]. □

Osservazione 3.7. *Vogliamo sottolineare una proprietà "tecnica" della successione approssimante del precedente Teorema. Siano $\omega_1 \leq \omega_2$ due funzioni peso nella classe A_1, tali che ω_1, $\omega_2 \in Lip(\Omega)$. Sia $u \in BV(\Omega;\omega_2)$. Ripetendo le stesse argomentazioni del Teorema 3.6, si osserva che esiste una successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega;\omega_2)$ tale che*

(i)

$$\|u_k - u\|_{L^1(\Omega;\omega_i)} \longrightarrow 0 \quad se\ k \to +\infty, \quad i = 1,2,$$

(ii)

$$\mathrm{var}_{\omega_i}\, u_k \longrightarrow \mathrm{var}_{\omega_i}\, u \quad se\ k \to +\infty, \quad i = 1,2.$$

Osservazione 3.8. *Sia $\omega \in A_1^*$. Allora $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega;\omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega;\omega)$.*

Nel caso particolare di $\omega \in \mathrm{Lip}\,(\Omega)$, possiamo stabilire la seguente proprietà di caratterizzazione dello spazio BV, che generalizzeremo al caso di pesi A_1^* nella prossima sezione.

Proposizione 3.9. *Sia $\omega \in A_1 \cap Lip\,(\Omega)$. Allora $u \in BV(\Omega;\omega)$ se e solo se $u \in BV(\Omega)$ e $\omega \in L^1(d\nu)$, dove con ν si indica la misura di Radon associata ad u nei termini stabiliti dal Teorema 2.1. Inoltre*

$$\mathrm{var}_\omega\, u(\Omega) = \int_\Omega \omega\, d\nu.$$

Dimostrazione. Abbiamo osservato già che $BV(\Omega;\omega) \subseteq BV(\Omega)$. Il Teorema 2.1 associa alla $u \in BV(\Omega)$ una misura di Radon ν su Ω.

Ora, per il Teorema 3.6, esiste una successione $\{u_k\} \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega;\omega)$, tale che

$$\|u_k - u\|_{L^1(\Omega;\omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{per } k \to +\infty,$$

e

$$\text{var}_\omega\, u_k \longrightarrow \text{var}_\omega\, u \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Essendo le u_k elementi di $BV(\Omega)$, sempre per il Teorema 2.1, associamo ad ogni u_k una misura di Radon ν_k.
È facile verificare che $\omega \in L^1(d\nu_k)$. Infatti, preso un aperto $U \subseteq \Omega$ $\nu_k(U) = \sup_{\varphi \in \text{Lip}_0(U;\mathbb{R}^n);\, |\varphi| \le 1} \int_\Omega u_k \text{div}\, \varphi\, dx = \int_U |Du_k|\, dx$ e, poiché le u_k sono funzioni regolari, applicando il teorema di differenziazione abbiamo che

$$d\nu_k = |Du_k|\, dx. \tag{3.11}$$

Dunque

$$\int_\Omega \omega(x)\, d\nu_k(x) = \int_\Omega \omega(x)|Du_k|\, dx = \text{var}_\omega\, u_k(\Omega) < \infty.$$

Verifichiamo ora che $\omega \in L^1(d\nu)$. Avendo supposto ω continuo, l'insieme $\{\omega(x) > t\}$ è aperto e perciò $\nu_k(\{\omega(x) > t\})$ e $\nu(\{\omega(x) > t\})$ sono ben definiti. Inoltre vale che

$$\nu_k(\{\omega(x) > t\}) = \sup_{\substack{\varphi \in \text{Lip}(\{x \in \Omega;\, \omega(x) > t\};\mathbb{R}^n);\\ |\varphi| \le 1;}} \int_\Omega u_k \,\text{div}\, \varphi\, dx,$$

e una simile espressione si trova per la coppia ν e u. Per il Teorema di Inferiore Semicontinuità 3.3, dato che $u_k \overset{L^1(\Omega;\omega)}{\longrightarrow} u$, si ha

$$\nu(\{\omega(x) > t\}) \le \liminf_{k\to\infty} \nu_k(\{\omega(x) > t\}). \tag{3.12}$$

Ora, $\int_\Omega \omega(x)\, d\nu = \int_0^\infty \nu(\{\omega(x) > t\})dt$, (si veda [M], Teorema 1.15). Analogo risultato si ottiene per le ν_k.

Usando la (3.12) e il lemma di Fatou ne segue che$\int_0^\infty \nu(\{\omega(x) > t\})dt \le \int_0^\infty \liminf_{k\to\infty} \nu_k(\{\omega(x) > t\})dt \le \liminf_{k\to\infty} \int_0^\infty \nu_k(\{\omega(x) > t\})dt$. L'ultimo termine è uguale a $\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \omega(x)\, d\nu_k = \lim_{k\to\infty} \text{var}_\omega\, u_k(\Omega) = \text{var}_\omega\, u(\Omega)$. Concludendo, abbiamo

$$\int_\Omega \omega(x)\, d\nu = \int_0^\infty \nu(\{\omega(x) > t\})dt \le \text{var}_\omega\, u(\Omega) < \infty, \tag{3.13}$$

che in particolare prova che $\omega \in L^1(d\nu)$.

• Viceversa, supponiamo che $u \in BV(\Omega)$ e $\omega \in L^1(d\nu)$. Per il Teorema 2.1,

$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d\nu(x)$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Se $|\varphi| \leq \omega$ maggioriamo con $\int_\Omega \omega(x)\, d\nu < \infty$. Prendendo l'estremo superiore su tutte le funzioni φ, $|\varphi| \leq \omega$, abbiamo $\mathrm{var}_\omega u(\Omega) \leq \int_\Omega \omega \, d\nu$ dunque $u \in BV(\Omega; \omega)$. In particolare, per la (3.13) e l'ultima espressione, abbiamo mostrato che $\mathrm{var}_\omega u(\Omega) = \int_\Omega \omega \, d\nu$ e abbiamo quindi concluso.

□

La dimostrazione del Teorema 3.5, in questo caso particolare in cui il peso è lipschitziano, è immediata:

Proposizione 3.10. *Sia $\omega \in \mathrm{Lip}(\Omega)$, $\omega \in A_1$. La conclusione del Teorema 3.5 è vera.*

Dimostrazione. Sia $u \in BV(\Omega; \omega)$. In particolare allora $u \in BV(\Omega)$ e per il Teorema 2.1, si associano ad u una misura di Radon ν su Ω e una funzione ν-misurabile $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che:

- $|\sigma(x)| = 1$ ν-q.o. in Ω,
- $\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d\nu(x)$ per ogni $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Dalla precedente proposizione, se $u \in BV(\Omega; \omega)$, segue che

$$\int_\Omega \omega(x)\, d\nu = \mathrm{var}_\omega u(\Omega). \tag{3.14}$$

Ebbene, se poniamo

$$d\mu := \omega \, d\nu;$$

la funzione σ è anche μ-misurabile e

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > \frac{1}{\omega(x)} d\mu(x) \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega; \mathbb{R}^n),$$

che conclude la prova.

□

4 Teorema di caratterizzazione per pesi A_1^*, disuguaglianze di Poincaré ed isoperimetrica

Teorema 4.1. *Sia $\omega \in A_1^*$. Allora $u \in BV(\Omega; \omega)$ se e solo se $u \in BV(\Omega)$ e $\omega \in L^1(d\nu)$, dove ν è la misura di Radon associata ad u definita nel Teorema 2.1. In particolare*

$$\mathrm{var}_\omega u(\Omega) = \int_\Omega \omega \, d\nu. \tag{4.15}$$

Dimostrazione. Sia $u \in BV(\Omega;\omega)$ e sia $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ l'inviluppo di Pash-Hausdorff di ω. Le ω_k sono lipschitziane, $\omega_k \geq 1$ e $\omega_k(x) \nearrow \omega(x)$ per ogni x. Inoltre, $BV(\Omega;\omega) \subset BV(\Omega;\omega_k) \subseteq BV(\Omega)$ e per ogni k vale

$$\mathrm{var}_{\omega_k} u \leq \mathrm{var}_\omega u(\Omega). \tag{4.16}$$

Dalla Proposizione 3.9 segue che $u \in BV(\Omega)$ e $\omega_k \in L^1(d\nu)$ per ogni k, dove ν è la misura di Radon associata ad u come indicato nel Teorema 2.1. Applicando il Teorema di Convergenza Monotona abbiamo $\int_\Omega \omega\, d\nu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \omega_k\, d\nu$, da cui, per i risultati del precedente paragrafo,

$$\int_\Omega \omega\, d\nu = \lim_{k\to\infty} \mathrm{var}_{\omega_k} u \leq \mathrm{var}_\omega u(\Omega) < \infty, \tag{4.17}$$

(la (4.16) implica l'ultima disuguaglianza). Ebbene, in particolare $\omega \in L^1(d\nu)$.

Proviamo che $\int_\Omega \omega\, d\nu = \mathrm{var}_\omega u(\Omega)$. Fin qui abbiamo osservato che $\int_\Omega \omega\, d\nu \leq \mathrm{var}_\omega u(\Omega)$. Ora, poiché $u \in BV(\Omega)$ e $\omega \in L^1(d\nu)$, vale

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d\nu(x) \leq \int_\Omega \omega(x)\, d\nu, \text{ per ogni } \varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

se $|\varphi| \leq \omega$. Passando all'estremo superiore sulle φ, $|\varphi| \leq \omega$, si ha $\mathrm{var}_\omega u(\Omega) \leq \int_\Omega \omega\, d\nu$ (che in particolare implica che $u \in BV(\Omega;\omega)$) e quindi abbiamo concluso. □

Dimostrazione del Teorema 3.5. La prova del Teorema nella sua forma più generale segue dalla precedente proposizione ragionando esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 3.10. □

Osservazione 4.2. *Siano $\omega \in A_1^*$ e $u \in BV(\Omega;\omega)$, e sia $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in Lip(\Omega)$ l'inviluppo di Pash-Hausdorff di ω. Allora $var_{\omega_k} u \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{var}_\omega u(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.1 abbiamo $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{var}_{\omega_k} u = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \omega_k\, d\nu = \int_\Omega \omega\, d\nu = \mathrm{var}_\omega u(\Omega)$, e la prova è conclusa. □

4.1 Disuguaglianze di Sobolev-Poincaré

Il risultato principale di questo paragrafo è contenuto nel seguente Teorema.

Teorema 4.3 (Disuguaglianze di Poincaré e Sobolev). *Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ con $\omega \in A_1^*$ e $q > 1$ tali che la seguente condizione di bilanciamento*

$$\frac{r}{s}\left(\frac{\omega(B(x,r))}{\omega(B(x,s))}\right)^{(1/q)-1} \leq c \tag{4.18}$$

valga per ogni coppia di palle $B(x,r) \subset B(x,s)$ in $\mathbb{R}^n$ (si veda [CW]), allora esistono due costanti positive C_1 e C_2 tali che valgono le disuguaglianze:

(i)

$$\left(\fint_B |u - u_B|^q \omega(y)dy \right)^{1/q} \leq C_1 \frac{r}{\omega(B)} \mathrm{var}_\omega u\,(B), \tag{4.19}$$

per ogni palla $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, *tale che* $u_B = \dfrac{1}{|B|} \displaystyle\int_B u(y)\,dy;$

(ii) se $\limsup_{R\to\infty} R\omega(B(0,R))^{(1/q)-1} < \infty$ *allora*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n;\omega)} \leq C_2 \mathrm{var}_\omega u\,(\mathbb{R}^n).$$

Dovremo fare del lavoro preliminare prima di poter dare una dimostrazione esauriente del Teorema 4.3. A tal fine, introduciamo ora una nuova definizione e un risultato entrambi contenuti in [FPW].

Definizione 4.4. *Sia* $1 \leq q < \infty$ *e sia* ω *una funzione peso. Denotata con* $\mathcal{B}$ *la classe di tutte le palle in* $\mathbb{R}^n$, *diciamo che la funzione* $a : \mathcal{B} \longrightarrow (0,\infty)$ *soddisfa la condizione* D_q^* *pesata se esiste una costante finita c tale che per ogni palla ed ogni famiglia* $\{B_i\}$ *di sottopalle di B*

$$\sum_i a(B_i)^q \omega(B_i) \leq c^q a(B)^q \omega(B),$$

purché la collezione $\{B_i\}$ *abbia intersezione limitata, cioè* $\sum_i \chi_{B_i} \leq c_1 < \infty$.

Proposizione 4.5. *Sia* B_0 *una palla. Supponiamo che la funzione a soddisfi la condizione* D_q^* *pesata per qualche* $1 < q < \infty$ *e per* $\omega \in A_1^*$. *Sia f una funzione su* B_0 *tale che per tutte le palle* $B \subset B_0$

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B|\,dx \leq \|f\|_a a(B),$$

dove $\|f\|_a$ *indica una costante dipendente solo da f e da a. Allora esiste una costante c indipendente da f e da* B_0, *tale che*

$$\frac{1}{\omega(B_0)} \int_{B_0} |f - f_{B_0}|\,\omega(x)\,dx \leq c\,\|f\|_a a(B_0).$$

Dimostrazione. Il risultato segue dal Corollario 2.4 e l'Osservazione 2.6 in [FPW]. □

Siamo ora in condizione di provare una L^1−disuguaglianza di Poincaré:

Proposizione 4.6. *Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ con $\omega \in A_1^*$, allora esiste una costante C tale che*

$$\fint_{B_0} |u - u_{B_0}|\,\omega(x)\,dx \le C\,\frac{r_0}{\omega(B_0)}\,\mathrm{var}_\omega\, u\,(B_0) \tag{4.20}$$

per tutte le palle $B_0 = B_0(y, r_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Essendo $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ allora $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Per funzioni in $BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ vale la seguente disuguaglianza di Poincaré (si vedano [EG], [G]):

$$\fint_{B} |u - u_{B}|\,dx \le C\,\frac{r}{|B|}\,\mathrm{var}\, u\,(B) \tag{4.21}$$

per ogni palla $B \subset \mathbb{R}^n$ di raggio r. Come conseguenza della Teorema 4.1 scriviamo $\mathrm{var}_\omega\, u\,(B) = \int_B \omega\, d\nu$, allora $\mathrm{var}_\omega\, u\,(B) \ge \inf_B \omega \int_B d\nu = \inf_B \omega\, \mathrm{var}\, u\,(B)$. Questa espressione e la A_1-condizione soddisfatta da ω implicano che $\mathrm{var}_\omega\, u\,(B) \ge c\,\frac{\omega(B)}{|B|}\,\mathrm{var}\, u\,(B)$. Quindi, essendo $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ e avendo la (4.21) abbiamo

$$\fint_{B} |u - u_{B}|\,dx \le C\,\frac{r}{\omega(B)}\,\mathrm{var}_\omega\, u\,(B) \tag{4.22}$$

per ogni palla $B \subset \mathbb{R}^n$ di raggio r.

Sia $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ una palla fissata. La precedente espressione vale in particolare per tutte le palle $B \subset B_0$.

Adesso scegliamo la funzione

$$a(B) := \frac{r}{\omega(B)}\,\mathrm{var}_\omega\, u\,(B), \tag{4.23}$$

dove r denota il raggio di B. Affinché siano verificate tutte le ipotesi della Proposizione 4.5 dobbiamo solo controllare che la funzione $a(B)$ di (4.23) soddisfi la condizione D_q^* pesata per un $1 < q < \infty$.

Supponiamo per un momento che questo sia vero e applichiamo il risultato della Proposizione 4.5 a (4.22); otteniamo la disuguaglianza (4.20) per ogni palla $B_0 \subset \mathbb{R}^n$, quindi la dimostrazione è conclusa.

Dunque, verifichiamo che la funzione $a(B)$ soddisfa la condizione D_q^* della Definizione 4.4. Verifichiamo che il q opportuno affinché valga tale condizione è proprio quello dato dalla condizione di bilanciamento (4.18). Infatti, sia $\{B_i\}$ una famiglia di sottopalle di B con intersezione finita e con raggio r_i, per la condizione di bilanciamento (4.18) abbiamo che

$$r_i^q\,\omega(B_i)^{1-q} \le c^q\, r^q\, \omega(B)^{1-q} \quad \text{per ogni } i. \tag{4.24}$$

Quindi con questa scelta di q e per la (4.24), $\sum_i \left(\frac{r_i}{\omega(B_i)} \operatorname{var}_\omega u\,(B_i)\right)^q \omega(B_i) \leq c^q \omega(B)^{1-q} \sum_i (\operatorname{var}_\omega u\,(B_i))^q$. Essendo $\operatorname{var}_\omega u\,(.)$ una misura $\sum_i (\operatorname{var}_\omega u\,(B_i))^q \leq c\,(\operatorname{var}_\omega u\,(B))^q$, e quindi a soddisfa la condizione D_q^* per q dato dalla (4.18) e abbiamo finito. □

L'ultimo "ingrediente" per dimostrare il Teorema 4.3 è una sorta di risultato di densità valido per funzioni BV pesate.

Teorema 4.7. *Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$, con $\omega \in A_1^*$, allora, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, esiste una successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega;\omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tale che*

(1)

$$\|u_k - u\|_{L^1(\Omega;\omega)} \longrightarrow 0 \quad per\, k \to +\infty,$$

(2) per ogni k

$$\operatorname{var}_\omega u_k\,(\Omega) \leq c \operatorname{var}_\omega u(\Omega),$$

dove c è una costante positiva.

Dimostrazione. Si veda Teorema 4.7 in [B]. □

Possiamo finalmente dimostrare il Teorema 4.3.

Dimostrazione del Teorema 4.3. Sia $B = B(x,r)$ una palla in $\mathbb{R}^n$. Sia poi $\{u_m\} \subset BV(B(x,r);\omega) \cap C^\infty(B(x,r))$ la successione convergente ad u in norma $L^1(B(x,r);\omega)$, determinata nel Teorema 4.7. Applicando la disuguaglianza pesata di Sobolev-Poincaré standard a u_m abbiamo:

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u_m - (u_m)_B|^q \omega(y)dy\right)^{1/q} \leq$$
$$c\frac{r}{\omega(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |Du_m|\,\omega(y)\,dy = c\frac{r}{\omega(B(x,r))}\operatorname{var}_\omega u_m\,(B(x,r)),$$

che per il Teorema 4.7-(2) è maggiorato da $C_1 \frac{r}{\omega(B(x,r))}\operatorname{var}_\omega u\,(B(x,r))$ per tutti gli m. Notiamo inoltre che $u_m \to u$ in L^1_{loc} poiché $\omega \in A_1^*$. Dunque $(u_m)_B \to u_B$ per ogni palla B e, se facciamo tendere $m \to \infty$, applicando il Lemma di Fatou abbiamo

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u - u_B|^q \omega(y)dy\right)^{1/q} \leq \liminf_{m\to\infty}\left(\fint_{B(x,r)} |u_m - (u_m)_B|^q \omega(y)dy\right)^{1/q}$$
$$\leq C_1 \frac{r}{\omega(B(x,r))}\operatorname{var}_\omega u\,(B(x,r)),$$

e questo conclude la prova della parte (i) del Teorema.

Attraverso argomentazioni standard si deduce dalla (4.19) che se u è a supporto compatto in B è possibile scrivere la (4.19) senza che vi compaia la media di u.

Proviamo la parte (ii) dell'enunciato del teorema. Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$. Consideriamo una classe $\{\varphi_R(x)\}$ di funzioni cut-off a valori reali, tale che $\varphi_R \equiv 1$ se $|x| < R/2$, $\varphi_R \equiv 0$ se $|x| > R$ e $|D\varphi_R| \leq 2$ se $R/2 \leq |x| \leq R$. Scegliamo la funzione $u_R := u\,\varphi_R$ che ha supporto compatto in $B_R = B(0,R)$. Ovviamente $u_R \to u$ q.o. se $R \to \infty$. Sia $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq \omega$; abbiamo

$$\int_{B_R} u\varphi_R \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_{B_R} u \operatorname{div}(\varphi_R\,\varphi)\, dx - \int_{B_R} u < \varphi, D\varphi_R > dx$$

$$\leq \mathrm{var}_\omega\, u\,(\mathbb{R}^n) + 2\int_{R/2\leq|x|\leq R} |u|\,\omega(x)\, dx.$$

La funzione u_R è a supporto compatto in B_R dunque, come osservato prima, si può omettere la media di u_R nella (4.19); per la parte (i) del teorema e per la precedente espressione abbiamo la seguente disuguaglianza di Sobolev:

$$\left(\int_{B_R} |u_R|^q\omega(x)dx\right)^{1/q} \leq C_1 \frac{R\omega(B_R)^{1/q}}{\omega(B_R)}\, \mathrm{var}_\omega u_R\,(B_R)$$

$$\leq C_1 R\,\omega(B_R)^{1/q-1}\mathrm{var}_\omega\, u\,(\mathbb{R}^n) + C_1' R\,\omega(B_R)^{1/q-1}\int_{R/2\leq|x|\leq R} |u|\,\omega(x)\, dx.$$

Applicando il Lemma di Fatou segue che

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q\omega(x)dx\right)^{1/q} \leq \liminf_{R\to+\infty}\left(\int_{B_R} |u_R|^q\omega(x)dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C_1 \limsup_{R\to\infty} R\,\omega(B_R)^{1/q-1}\, \mathrm{var}_\omega u\,(\mathbb{R}^n)$$

$$+C_1 \limsup_{R\to\infty} R\,\omega(B_R)^{1/q-1} \lim_{R\to\infty}\int_{R/2\leq|x|\leq R} |u|\,\omega(x)\, dx.$$

Per ipotesi $\limsup_{R\to\infty}\left(R\,\omega(B_R)^{1/q-1}\right) \leq c$ e si ha $\lim_{R\to\infty}\int_{R/2\leq|x|\leq R}|u|\,\omega(x)\,dx = 0$, abbiamo quindi provato la parte (ii).

□

Osservazione 4.8. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Dalla condizione (4.18)e dalla (4.19) segue che se $\Omega \subseteq B_0 = B(0,R)$ allora*

$$\left(\int_{B} |u - u_B|^q\omega(y)dy\right)^{1/q} \leq C_1\, R\,\omega(B_0)^{\frac{1}{q}-1}\mathrm{var}_\omega\, u\,(B) = C(\Omega)\mathrm{var}_\omega\, u\,(B),$$

per ogni palla $B \subset \Omega$.

4.2 Disuguaglianze isoperimetriche

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile, si dice che E ha perimetro finito in Ω se la funzione caratteristica di E, χ_E, appartiene $BV(\Omega)$. Se, inoltre, E è di classe C^2, la nozione di perimetro coincide con l'usuale nozione di dimensione di Hausdorff $n-1$ di $\Omega \cap \partial E$, $H^{n-1}(\Omega \cap \partial E) := \sup_{\eta \in \mathrm{Lip}_0(\Omega;\mathbb{R}^n);\, |\eta| \leq 1} \int_{\Omega \cap \partial E} \eta \, dH^{n-1}$.

Generalizziamo questa nozione di "perimetro finito" di un insieme E.

Definizione 4.9. *Sia $\omega \in A_1^*$. Diciamo che un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ ha "ω-perimetro finito" in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se la funzione caratteristica di E, χ_E, appartiene a $BV(\Omega;\omega)$. In questo caso poniamo*

$$|\partial E|\,(\Omega;\,\omega) = \mathrm{var}_\omega\, \chi_E\,(\Omega).$$

Osservazione 4.10. *Se E è un insieme regolare di $\mathbb{R}^r$, con frontiera di classe C^2, allora $|\partial E|\,(\Omega;\,\omega) = \int_{\Omega \cap \partial E} \omega \, dH^{n-1}$.*

Teorema 4.11. *Sia $\omega \in A_1^*$ e sia E di ω-perimetro finito in Ω e sia $q > 1$ che soddisfi la condizione di bilanciamento (4.18). Allora*

(i) per ogni palla $B = B(x,r) \subset \Omega$ vale:

$$\min\{\omega(B \cap E),\, \omega(B \cap E^c)\}^{1/q} \leq C\, r\, \omega(B)^{(1/q)-1} |\partial E|(B(x,r);\, \omega),$$

dove con E^c si indica il complementare di E in Ω e C è una costante positiva.

(ii)

$$\omega(E)^{1/q} \leq C_\Omega |\partial E|\,(\Omega;\,\omega),$$

e la costante C_Ω può essere scelta indipendente da Ω se $\limsup_{R \to \infty} R\,\omega(B(0,R))^{(1/q)-1} < \infty$.

Grazie all'Osservazione 4.8, il valore $C\, r\, \omega(B)^{(1/q)-1}$ che appare nella (i) può essere maggiorato da una costante che dipende solo da Ω.

Dimostrazione. Basta scegliere $u = \chi_E$ nel Teorema 4.3. □

5 Immersione Compatta di $BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ in $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\omega)$

Teorema 5.1. *Siano $\omega \in A_1^*$ e $q_0 > 1$ tali che sia soddisfatta la condizione di bilanciamento (4.18). Sia $\{u_m\} \subset BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ tale che*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{BV(\mathbb{R}^n;\omega)} < +\infty.$$

Consideriamo un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora esistono una sottosuccessione $\{u_{m_s}\}$ e una funzione $u \in BV(\Omega;\omega)$ tale che

$$u_{m_s} \overset{L^q(\Omega;\omega)}{\longrightarrow} u \quad se \;\; s \to +\infty$$

per ogni $1 \leq q < q_0$.

Dimostrazione. Ricordiamo che se $u \in BV(\mathbb{R}^n;\omega)$ allora

$$\left(\fint_B |u - u_B|^{q_0} \omega(y) dy \right)^{1/q_0} \leq C \frac{r}{\omega(B)} \operatorname{var}_\omega u\,(B),$$

per ogni palla $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

Usando un teorema di ricoprimento tipo-Vitali ricopriamo $\overline{\Omega}$ con un numero finito di palle $B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_{m(r)}$ di raggio $r(B_j) = r$ per ogni j e tali che

i) $B(x_k, r/5) \bigcap B(x_h, r/5) = \emptyset$ per $k \neq h$;

ii) $m(r) \leq c\, r^{-n}$;

iii) per ogni i $\sharp\{k : B(x_k, r) \bigcap B(x_i, r) \neq \emptyset\} \leq M$, dove M denota una costante geometrica.

Grazie al Teorema 4.3, essendo $q < q_0$, è immediato verificare che $\{u_m\}$ è limitata in $L^q(\Omega;\omega)$. Il problema non perde la sua generalità se si suppone che $q > 1$ cosicché $L^q(\Omega;\omega)$ è uno spazio riflessivo. Esiste dunque una sottosuccessione $\{u_{m_s}\}$ che converge debolmente in $L^q(\Omega;\omega)$ a una funzione u. Per evitare di appesantire la notazione scriveremo che $\{u_{m_s}\} = \{u_m\}$. Procedendo come nella prova del Teorema 3.4 in [FSSC], le cui argomentazioni fanno riferimento ad un'idea già usata almeno in [N], è facile provare che $\{u_m\}$ è una successione di Cauchy in $L^q(\Omega;\omega)$. Infatti

$$\begin{aligned} &\|u_n - u_m\|_{L^q(\Omega;\omega)} \leq \sum_j \|u_n - u_m\|_{L^q(B_j;\omega)} \\ &\leq \sum_j \left(\|u_n - (u_n)_{B_j}\|_{L^q(B_j;\omega)} + \|u_m - (u_m)_{B_j}\|_{L^q(B_j;\omega)} + |(u_n - u_m)_{B_j}| \omega(B_j)^{1/q} \right) \\ &= \sum_j (I_j + J_j + R_j). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Supponiamo per il momento di sapere che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $r(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni palla $B = B(\overline{x}, r)$ con $\overline{x} \in \overline{\Omega}$ e $r < r(\varepsilon)$ si ha

$$r\omega(B)^{(1/q)-1} < \varepsilon. \tag{5.26}$$

Utilizzando ancora il Teorema 4.3, essendo $q < q_0$ si ha che

$$\sum_j \|u_m - (u_m)_{B_j}\|_{L^q(B_j;\omega)} = \sum_j \left(\fint_{B_j} |u_m - (u_m)_{B_j}|^q \, \omega(x)\, dx \right)^{1/q} \omega(B_j)^{1/q}$$
$$\leq \sum_j \left(\fint_{B_j} |u_m - (u_m)_{B_j}|^{q_0} \, \omega(x)\, dx \right)^{1/q_0} \omega(B_j)^{1/q}$$
$$\leq C \sum_j \mathrm{var}_\omega \, u_m \,(B)\, r\, \omega(B_j)^{(1/q)-1} \leq C\, M \, \mathrm{var}_\omega \, u_m \,(\mathbb{R}^n)\, \varepsilon$$
$$\leq c\varepsilon \quad \text{se } r < r(\varepsilon). \tag{5.27}$$

Da (5.27), abbiamo che $\sum_j (I_j + J_j) \leq c\varepsilon$ s $r < r(\varepsilon)$. Sia ora $r < r(\varepsilon)$ fissato. Dalla (5.26),

$$\sum_j R_j \leq \sum_j \left| \int_{B_j} (u_n - u_m)\, dx \right| \frac{\omega(B_j)^{1/q}}{|B_j|}$$
$$\leq \left(\max_{1 \leq j \leq m(r)} \frac{\omega(B_j)^{1/q}}{|B_j|} \right) \sum_{j=1}^{m(r)} \left| \int_{B_j} (u_n - u_m)\, dx \right| \leq C(\Omega)\, m(r)\, r^{-n} \varepsilon,$$

poiché $\{u_m\}$ converge debolmente a u e $\left(\max_{1 \leq j \leq m(r)} \frac{\omega(B_j)^{1/q}}{|B_j|} \right)$ si può maggiorare con $C(\Omega)\, r^{-n}$.

Abbiamo dunque verificato che $\{u_m\}$ è una successione di Cauchy in $L^q(\Omega;\omega)$ che perciò converge ad u in norma $L^q(\Omega;\omega)$. In particolare allora $u_m \stackrel{L^1(\Omega;\omega)}{\longrightarrow} u$ se $m \to +\infty$ e per il Teorema 3.3 di Inferiore Semicontinuità segue che $\mathrm{var}_\omega \, u(\Omega) \leq \liminf_{m \to +\infty} \mathrm{var}_\omega \, u_m \,(\Omega)$. Ma per ipotesi $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{BV(\Omega;\omega)} < \infty$ e dunque $u \in BV(\Omega;\omega)$ che è quanto volevamo dimostrare.

Per finire, non ci resta che provare la (5.26). Ebbene, fissiamo $\bar{r} > 0$ e ricopriamo $\overline{\Omega}$ con un numero finito di palle aventi raggio $\bar{r}$. Ogni altra palla di raggio $\bar{r} > 0$ e centrata in un punto di $\overline{\Omega}$ interseca una delle palle del suddetto ricoprimento e quindi la sua ω-misura è equivalente alla ω-misura di tale palla. Allora, per ogni B centrata in un punto di $\overline{\Omega}$ e con raggio $\bar{r}$ vale $\bar{r}\,\omega(B)^{(1/q_0)-1} \leq C_1$. Perciò se $\tilde{B}$ è una qualsiasi palla di raggio $r < \bar{r}$ e B è la palla concentrica e di raggio $\bar{r}$, dalla condizione (4.18) otteniamo: $r\,\omega(\tilde{B})^{(1/q)-1} = r\,\omega(\tilde{B})^{(1/q_0)-1}\omega(\tilde{B})^{(1/q)-(1/q_0)} \leq \bar{c}\,\omega(\tilde{B})^{(1/q)-(1/q_0)}$, che è piccola se r è piccolo, essendo $(1/q) - (1/q_0) > 0$. Ora la (5.26) è provata.

□

Come applicazione della teoria precedente possiamo generalizzare al caso di $BV(\Omega;\omega)$ il risultato provato da De Giorgi ([DG]) in $BV(\Omega)$ circa l'esistenza di Superfici Minime.

Teorema 5.2 (Esistenza di Superfici Minime). *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e sia L un insieme di ω-perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ (nel senso della Definizione 4.9). Allora esiste un insieme E coincidente con L fuori da Ω e tale che*

$$|\partial E|(\mathbb{R}^n;\omega) \leq |\partial F|(\mathbb{R}^n;\omega)$$

per ogni insieme F con $F = L$ fuori di Ω.

Dimostrazione. La prova è identica a quella data in [G] (Teorema 1.20) per il caso non pesato; infatti anche nel nostro contesto i due ingredienti fondamentali della prova sono la semicontinuità di var_ω (Teorema 3.3) e l'immersione compatta $BV(\mathbb{R}^n;\omega) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\omega)$. □

Osservazione 5.3. *Come conseguenza del Teorema 4.1 non è difficile provare che il nostro spazio BV pesato coincide con lo spazio delle funzioni BV rispetto alla misura $d\,\mu(x) = \omega(x)\,dx$ definite in [BBF]. Inoltre la misure variazione coincidono quando ω è continuo.*

Perciò il nostro spazio BV può essere visto come il dominio di finitezza del funzionale rilassato associato ad un funzionale tipo-area della forma $\int \omega(x)\sqrt{1+|Du|^2}\,dx$.

Riferimenti bibliografici

[AG] G. Anzellotti, M. Giaquinta, *Funzioni BV e tracce*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova vol. 60 (1976), 1-21.

[B] A. Baldi, *Weighted BV Functions*, sottomesso per pubblicazione (2000).

[BBF] G. Bellettini, G. Bouchitté, I. Fragalà, *BV functions with respect to a measure and relaxation of metric integral functionals*, Journal Convex Anal. 6 (1999), 349-366.

[BBMP] F. Betta, F. Brock, A. Mercaldo, M.R. Posteraro, *A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization*, preprint.

[CW] S. Chanillo, R.L. Wheeden, *Weighted Poincaré inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions*, Amer. J. Math. 107(1985), 1191-1226.

[DG] E. De Giorgi, *Frontiere orientate di misura minima*, Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960-61 Editrice Tecnico Scientifica, Pisa (1961).

[EG] L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Flo. (1992).

[Fe] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag (1969).

[FPW] B. Franchi, C. Perez, R.L. Wheeden, *Self improving properties of Jhon-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Functional Analysis 153 (1998), 108-146.

[FSSC] B. Franchi, R. Serapioni, F. Serra Cassano, *Approximation and imbedding theorems for weighted Sobolev spaces associated with Lipschitz continuous vector fields*, Boll. Un. Mat. It. (7) 11-B (1997), 83-117.

[GCRF] J. García-Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland, (1985).

[G] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Matematics 80, Birkhäuser (1984).

[M] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, (1995).

[Mu] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

[N] J. Nečas, *Les métodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson er Cie, Paris 1967.

[R] R.T. Rockafellar, R.J.B. Wets, *Variational analysis*, Grundher. der Mathem. Wissen. 317, Springer-Verlag, New York (1996).

[S] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series 43, Priceton University Press, New York, (1993).